Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1 - Correction

Exercice 1. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$(E):\quad x(x^2+1)y'-2y=x^3(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Partie A - Résolution de l'équation homogène

Q1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x>0$, on ait

$$\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}.$$

En mettant au même dénominateur le membre de droite puis en développant et regroupant les termes de même degré, on a

$$\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}=\frac{a(x^2+1)+x(bx+c)}{x(x^2+1)}=\frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}.$$

Par identification avec $\dfrac{2}{x(x^2+1)}$, on obtient $\begin{cases}a+b=0\\c=0\\a=2\end{cases}$ et donc $\boxed{a=2,\ b=-2 \text{ et } c=0}$.

Q2. En déduire une primitive de la fonction $x\longmapsto\dfrac{2}{x(x^2+1)}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

D'après la question précédente, on cherche une primitive de $x\longmapsto\dfrac{2}{x(x^2+1)}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^2+1}$. Ainsi la fonction $\boxed{x\longmapsto 2\ln x-\ln\lvert x^2+1\rvert}$ convient.

Q3. Donner l'équation homogène associée à (E) puis la résoudre sur $]0\,;+infty[$.

L'équation homogène associée à (E) est $x(x^2+1)y'-2y=0$.
Comme $x(x^2+1)\neq 0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, on a $x(x^2+1)y'-2y=0\iff y'-\dfrac{2}{x(x^2+1)}y=0$. Les solutions sont alors les fonctions y_H de la forme $y_H(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et A une primitive de la fonction $x\longmapsto\dfrac{-2}{x(x^2+1)}$. D'après la question précédente, on a donc

$$y_H(x)=\lambda\exp\Big(2\ln x-\ln(x^2+1)\Big)=\lambda\frac{\exp(\ln(x^2))}{\exp(\ln(x^2+1))}=\boxed{\lambda\frac{x^2}{x^2+1}\quad\text{avec }\lambda\in\mathbb{R}}.$$

Remarque : ce résultat est cohérent avec la forme choisie pour y_P dans la partie B étant donné qu'on y détaillera la méthode de variation de la constante.

Partie B - Recherche d'une solution particulière

On cherche maintenant une solution particulière y_P de (E) sous la forme $y_P(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}z(x)$ où z est une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Q4. Montrer que y_P est solution de (E) si et seulement si $z'(x)=(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x>0$.

D'abord, y_P est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit et quotient de fonctions qui le sont avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur cet intervalle. Pour tout $x > 0$, on a

$$y_P'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \times 2x}{(x^2+1)^2} z(x) + \frac{x^2}{x^2+1} z'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} z(x) + \frac{x^2}{x^2+1} z'(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y_P \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x > 0,\ x(x^2+1) y_P'(x) - 2 y_P(x) = x^3 (x-1)^2 \,\mathrm{e}^{-x} \\ &\iff \forall x > 0,\ \cancel{\frac{2x^2}{x^2+1} z(x)} + x^3 z'(x) - \cancel{\frac{2x^2}{x^2+1} z(x)} = x^3 (x-1)^2 \,\mathrm{e}^{-x} \\ &\overset{x^3 \neq 0}{\iff} \boxed{\forall x > 0,\ z'(x) = (x-1)^2 \,\mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

Q5. Justifier que la fonction $x \longmapsto -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que c'est une primitive de la fonction $x \longmapsto (x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Notons f la fonction $x \longmapsto -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles et on a par dérivation d'un produit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\Big[2x\,\mathrm{e}^{-x} - (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}\Big] = -(2x - x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x} = (x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi $\boxed{x \longmapsto -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} \text{ est une primitive de } x \longmapsto (x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Q6. En déduire l'expression d'une solution particulière y_P de (E).

D'après les deux questions précédentes, on obtient $z(x) = -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Comme on a cherché y_P sous la forme $y_P(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} z(x)$, l'expression d'une solution particulière de (E) est donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad y_P(x) = -x^2\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Partie C - Conclusion

Q7. Déduire des parties A et B l'ensemble des solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

On a résolu l'équation homogène (partie A) et trouvé une solution particulière (partie B) donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\boxed{y(x) = \lambda \frac{x^2}{x^2+1} - x^2\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}.$$

Q8. Déterminer l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 2$.

Le théorème de Cauchy assure l'existence et l'unicité d'une solution telle que $y(1) = 2$.

En prenant $x = 1$ dans l'expression obtenue à la question précédente, on a $2 = y(1) = \lambda \times \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-1}$, d'où $\lambda = 2(2 + \mathrm{e}^{-1})$. Ainsi, l'unique solution de (E) vérifiant $y(1) = 2$ est la fonction y définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\boxed{y(x) = 2(2 + \mathrm{e}^{-1}) \frac{x^2}{x^2+1} - x^2\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Exercice 2. La chaînette (*d'après BCPST 2023*)

Dans une première partie, on démontre quelques propriétés concernant deux fonctions. Dans la seconde partie, ces fonctions sont utilisées dans le cadre d'un problème physique.

Partie A - Deux fonctions

On définit les deux fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Q9. Étudier la parité des fonctions ch et sh.

Tout d'abord, $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$ est bien symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x),$$

donc $\boxed{\text{la fonction ch est paire}}$. De manière analogue,

$$\sin(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = \frac{-(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})}{2} = -\,\mathrm{sh}(x),$$

donc $\boxed{\text{la fonction sh est impaire}}$.

Q10. Déterminer le signe de $\mathrm{ch}(x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$ pour tout réel x.

- Comme une exponentielle est toujours strictement positive, par somme on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > 0}$.
- Pour sh, on a

$$\mathrm{sh}(x) > 0 \iff \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0 \overset{\times 2}{\iff} \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{-x} \overset{\ln}{\iff} x > -x \iff 2x > 0 \iff x > 0.$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 0,\ \mathrm{sh}(x) > 0 \text{ et de même } \forall x < 0,\ \mathrm{sh}(x) < 0 \text{ et } \mathrm{sh}(0) = 0}$.

Q11. Justifier que les fonctions ch et sh sont dérivables puis montrer que pour tout réel x, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions usuelles. De plus, pour tout réel x, on a $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$ et $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)' = -\,\mathrm{e}^{-x}$, d'où

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \boxed{\mathrm{sh}(x)} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - (-\,\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \boxed{\mathrm{ch}(x)}.$$

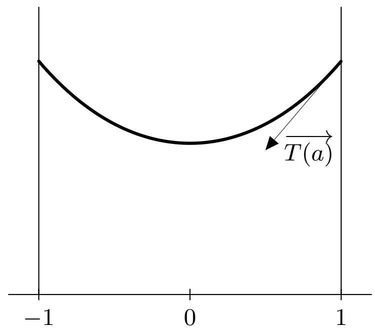
Q12. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction sh.

En utilisant le développement limité de exp, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \left(1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!}\right) + o(x^3)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} + x - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\\
&= \boxed{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}.
\end{aligned}$$

Partie B - Tension

On admet que si on tend un câble entre deux poteaux, le câble n'étant soumis qu'à son propre poids et accroché des deux côtés à la même hauteur, alors il prend la forme d'une *chaînette* (cf illustration ci-contre).



On peut déterminer la tension du câble au niveau d'un poteau (vecteur force représenté ci-contre) : elle est égale à

$$T(a) = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{a}\right),$$

où a est un réel strictement positif (dépendant de la longueur du câble et de la distance entre les deux poteaux) et ch la fonction définie dans la partie précédente.

Le but de cette partie est de déterminer la valeur du paramètre a pour laquelle la tension au niveau des poteaux est minimale.

On introduit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 0,\ \ g(x) = \mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x),$$

où ch et sh sont les deux fonctions définies dans la partie précédente.

Q13. Justifier que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1-x}{2}\,\mathrm{e}^x$ puis en déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$g(x) = \mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} - x\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1-x}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{1+x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\,\mathrm{e}^x = -\infty$ et d'autre part, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Ainsi $\boxed{g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1-x}{2}\,\mathrm{e}^x}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.

Q14. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;+\infty[$. On y fera figurer les valeurs et limites aux bornes de l'intervalle.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions dérivables (cf **Q11**). Pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = \mathrm{ch}'(x) - [1 \times \mathrm{sh}(x) + x \times \mathrm{sh}'(x)] \overset{\textbf{Q11}}{=} \mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x) = \boxed{-x\,\mathrm{ch}(x)}.$$

Or sur $\mathbb{R}_+$, on a $x \geqslant 0$ et, par **Q10**, $\mathrm{ch}(x) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \leqslant 0$ avec annulation seulement en $x = 0$. Finalement, avec la limite déterminée à la question précédente, on obtient

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
g	1	$\searrow$	$-\infty$

Q15. Rappeler le théorème de la bijection.

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I dans $J = f(I)$. Autrement dit, pour tout $k \in J$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Q16. Montrer que l'équation $\operatorname{ch}(x) = x \operatorname{sh}(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution sur $[0\,;+\infty[$. Dans la suite, on note m cette solution.

D'après **Q14**, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $]-\infty\,;1[$. Comme $0 \in\,]-\infty\,;1[$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, *i.e.* $\boxed{\text{l'équation } \operatorname{ch}(x) = x \operatorname{sh}(x) \text{ admet une unique solution } m \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

Q17. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{ch}(x) \geqslant x \operatorname{sh}(x)$ si et seulement si $x \in [0\,;m]$.

Commençons par remarquer que $\operatorname{ch}(x) \geqslant x \operatorname{sh}(x)$ se réécrit $g(x) \geqslant 0$. En reprenant le tableau de variations de g obtenu en **Q14** (cf ci-contre), on observe que $g(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [0\,;m]$.

x	0		m		$+\infty$
g	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Q18. Montrer que

$$\forall a > 0,\ T'(a) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{a}\right).$$

La fonction T est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables. Pour tout $a > 0$, par dérivation d'un produit et d'une composée, on a

$$T'(a) = 1 \times \operatorname{ch}\left(\frac{1}{a}\right) + a \times \frac{-1}{a^2} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{a}\right) = \boxed{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Q19. En déduire la valeur de a pour laquelle la tension $T(a)$ est minimale.

D'après la question précédente, pour tout $a > 0$, on a $T'(a) = g(1/a)$. Or on a déterminé le signe de g en **Q17** et on peut remarquer que pour $a > 0$, on a $1/a \leqslant m \iff a \geqslant 1/m$. Ainsi

a	0		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
$T'(a)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
T	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Finalement, $\boxed{\text{la tension } T \text{ est minimale pour } a = \dfrac{1}{m}}$.